შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

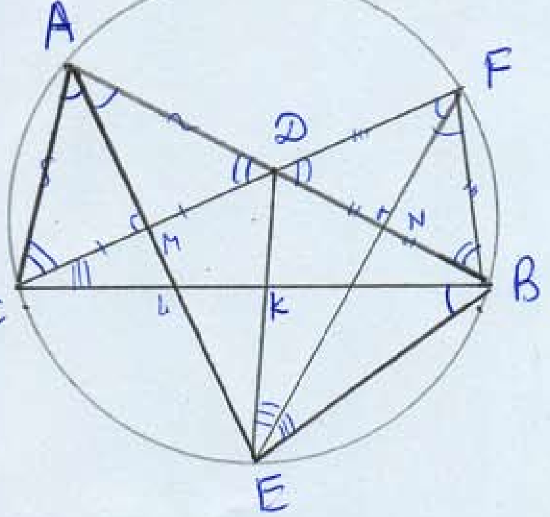
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა N

29.04.2012/ მათ/ IV/ 3/1

ამოცანა № 4

გვერდი № 1



ე.ვ. $\frac{CK}{AC}$ - ?

$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \\ \angle CAE = \angle EAB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AM \perp CD$ და $CM = MD$

$AC = AD \Rightarrow$ ~~$\angle CA$~~ $\angle CDA = \angle ACD$

მეორეს $\angle ADC = \angle FDB$ (ვერტიკალური კუთხეების გამო)

$\angle CAE = \angle DFE = \frac{\breve{CE}}{2}$. ე.ი $\angle FDB + \angle DFE = 90°$ ანუ

$FN \perp DB$ ანალოგიურად $\angle EAB = \angle EFB = \frac{\breve{BE}}{2}$ ± და $\angle EAB =$

$$\left.\begin{array}{l} = \angle CAE = \angle DFE \text{ და } \angle DFE = \angle EFB \\ FN \perp DB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DFB\text{- ტოლფერდაა}$$

$$\left.\begin{array}{l} DF = FB \text{ ამიტომ } DN = NB \\ \angle DNE = 90° \\ EN\text{- საერთო} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DNE = \Delta BNE \Rightarrow$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 3/1

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

$\Rightarrow \angle DEN = \angle NEB.$ $\quad \angle FCB = \angle FEB = \dfrac{\breve{BF}}{2} = \beta$ ხოლო

$\angle CBE = \angle CFE = \dfrac{\breve{CE}}{2} = \alpha \Rightarrow \angle EKB = 180^\circ - \angle KEB - \angle KBE =$

$= 180^\circ - 2\beta - \alpha$ $\quad \angle EKB = \angle CKD$ (ვერტიკალური კუთხეები არის).

ΔCKD-დან $\angle CDK = 180^\circ - \angle DCK - \angle CKD = 180^\circ - \beta - 180^\circ + 2\beta + \alpha =$

$= \alpha + \beta$ $\quad$ ცნობილია, რომ $DK \cdot EF = AC \cdot DF \Rightarrow \dfrac{DK}{AC} = \dfrac{DF}{EF}$

ვწეროთ სინუსების თეორემა ΔCDK-სთვის $\dfrac{DK}{\sin\angle DCK} = \dfrac{CK}{\sin\angle CDK}$ ე.ი.

$\dfrac{DK}{\sin\beta} = \dfrac{CK}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow DK = \dfrac{CK \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ეს ჩავსვათ ტოლობაში

$\dfrac{CK \sin\beta}{AC \cdot \sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{DF}{EF} \Rightarrow \dfrac{CK}{AC} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \cdot \dfrac{DF}{EF}$

განვიხილოთ ΔDEF აქ $\angle DEF = \beta$ $\quad \angle DFE = \alpha \Rightarrow \angle EDF =$

$= 180^\circ - \angle DEF - \angle DFE = 180^\circ - \alpha - \beta$ $\quad$ ვწეროთ სინუსების თეორემა

ამ სამკუთხედისთვის. $\dfrac{EF}{\sin\angle EDF} = \dfrac{DF}{\sin\angle DEF}$ ე.ი. $\dfrac{EF}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)} = \dfrac{DF}{\sin\beta}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	29.04.2012/ მათ/ IV/ 3/1

ამოცანა № 4 | გვერდი № 3

შევნიშნოთ, რომ $\sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha+\beta)$ ე.ი. გვექნება, რომ

$$\frac{EF}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{DF}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ჩავსვათ ეს შედეგი ამ ტოლობაში ვიღებთ. $\frac{CK}{AC} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{DF}{EF} =$

$$= \frac{\cancel{\sin(\alpha+\beta)}}{\cancel{\sin\beta}}\cdot\frac{\cancel{\sin\beta}}{\cancel{\sin(\alpha+\beta)}} = 1 \quad \text{ე.ი.} \quad \frac{CK}{AC} = 1$$

პასუხი: $\frac{CK}{AC} = 1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა N[redacted]

29.04.2012/ მათ/ IV/ 311

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

[illegible] [illegible] [illegible] n [illegible] [illegible] ყოველ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $(n-1)$ [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $N \geq \frac{n(n-1)}{2}$. [illegible] ყოველ m [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] m [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ყოველ m [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] m [illegible], [illegible] $n \geq 2^{m+1}-1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 311

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdot \ldots \cdot (x+d_9)$ $\quad d_1, d_2, \ldots, d_9 \geq 0$ და $\in \mathbb{Z}$

$d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_9\}$ $\quad \forall m \in \mathbb{Z}$ ისეთი, რომ $m > d^8$

$P(m) = (m+d_1)(m+d_2)\cdot \ldots \cdot (m+d_9)$ [illegible]

$d_1, d_2, d_3, d_4 \ldots d_9 \ \vdots\ p$ [illegible] $d \ \vdots\ p$, [illegible]

$d^8 \ \vdots\ p$ ამიტომ $\forall m \in \mathbb{Z}$ [illegible] ისეთი m, რომ $m \ \vdots\ p$

ე.ი. $P(m) = p^9 (k+a_1)(k+a_2)(k+a_3)\ldots(k+a_9)$ [illegible]

[illegible]

[illegible] p [illegible] $P(m)$

[illegible] 20-ზე [illegible]

[illegible]

$P(x) = x^9 + x^8 \sum_{i=1}^{n=9} d_i + x^7 (d_1 d_2 + d_1 d_3 + \ldots + d_8 d_9) + x^6 (d_1 d_2 d_3 + \ldots + d_7 d_8 d_9)$

$+ x^5 (d_1 d_2 d_3 d_4 + \ldots + d_6 d_7 d_8 d_9) + x^4 (d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 + \ldots + d_5 d_6 d_7 d_8 d_9)$

$+ x^3 (d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 + \ldots + d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9) + x^2 (d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 + d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9) +$

$+ x (d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 + d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9) + d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9$